

Материалы для обеспечения учебной самостоятельной работы (УСР) студентов

Тема 1. Обусловленность задачи решения систем линейных алгебраических уравнений (2ч. УСР)

1. Нормы векторов и матриц.
2. Обусловленность задачи решения СЛАУ. Число обусловленности.

Обусловленность задачи решения систем линейных алгебраических уравнений. Перейдем к конкретизации общих понятий, введенных выше, для случая систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Запишем данную систему в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Введем следующие обозначения

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что основная матрица A системы (1.1) является невырожденной ($\det A \neq 0$). Далее под символом $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ будем понимать приближенное решение системы (1.1) (T – знак транспонирования).

Определение 1.1. Вектор-столбец $e = x - x^*$ будем называть вектором-столбцом погрешности решения системы (1.1), а вектор $r = b - Ax^*$ – вектором-столбцом невязки (или просто невязкой).

Замечание 1.1. Погрешность решения и невязка могут сильно отличаться друг от друга.

Для количественной оценки погрешностей решения и невязки полезно ввести более простые числовые характеристики. В качестве таких характеристик в математике используются различного рода нормы.

Определение 1.2. Пусть L_n – n -мерное линейное (векторное) пространство. Будем говорить, что в этом пространстве задана норма $\|x\|$, если выполняются следующие условия:

- 1) $\forall x \in L_n$ сопоставлено единственное число $\|x\| \in \mathbb{R}$;
- 2) для $\forall x \in L_n$ $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) для $\forall x \in L_n$ и $\forall \alpha \in R$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

4) для $\forall x, y \in L_n$ выполняется неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

В математике пользуются разнообразными нормами. Одними из наиболее употребительных в вычислительной практике являются такие нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (1.2)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad (1.3)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (1.4)$$

При этом имеют место неравенства

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

Норму $\|x\|_2$ называют евклидовой нормой.

С помощью понятия нормы вектора можно уточнить определения абсолютной и относительной погрешностей вектора.

Определение 1.3. Абсолютной и относительной погрешностями приближенно заданного вектора x^* будем называть соответственно такие выражения:

$$\Delta(x^*) = \|x - x^*\|, \quad \delta(x^*) = \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|},$$

где x – точно заданный вектор.

На основе понятия нормы векторов можно ввести понятие и нормы квадратной матрицы A .

Определение 1.4. Нормой матрицы A размерности $n \times n$, подчиненной норме вектора $x \in L_n$ называется вещественное число

$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, где символ $\sup(\dots)$ имеет смысл точной верхней грани

множества всех значений, принимаемых величиной $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, когда $x \neq 0$.

Замечание 1.2. Норма матрицы обладает такими свойствами:

1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда A – нулевая матрица;

2) для $\forall \alpha \in R$ и любой квадратной матрицы A выполняется равенство $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;

3) для любых квадратных матриц A и B , имеющих одинаковую размерность $n \times n$, справедливо неравенство $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

4) для матриц, определенных в п. 3), верно неравенство $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$;

5) имеет место $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Замечание 1.3. Нормам $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ подчинены нормы $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$, которые задаются следующими выражениями:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (1.5)$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_j(A^T A)}, \quad (1.6)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (1.7)$$

где $\lambda_j(A^T A)$ – собственные числа матрицы $A^T A$ (T – знак транспонирования).

Поскольку собственные числа матрицы зачастую находить сложно, то иногда используют оценку $\|A\|_2 \leq \|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$, где $\|A\|_E$ – евклидова норма матрицы A .

Запишем систему (1.1) в матричной форме

$$Ax = b. \quad (1.8)$$

Если нам неизвестны точные значения элементов матрицы A и вектора-столбца b , то вместо (1.8) нам придется решать систему

$$A^* x^* = b^*, \quad (1.9)$$

где A^* и b^* – приближенные аналоги A и b . Если $\det A^* \neq 0$, то система (1.9) будет иметь единственное решение x^* , которое, однако, будет приближенным решением системы (1.8). Если $\det A = 0$, то решение системы (1.9) не будет иметь смысла. Это следует из того, что только по информации о приближенно заданном вектору-столбцу b^* нельзя установить разрешимость системы (1.8).

Имеет место

Теорема 1.1. Верна такая оценка относительной погрешности приближенного решения x^* системы (1.8):

$$\delta(x^*) \leq \text{cond}(A)(\delta(b^*) + \delta(A^*)), \quad (1.10)$$

где $\delta(b^*) = \frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}$, $\delta(A^*) = \frac{\|A - A^*\|}{\|A\|}$ – соответственно относительные

погрешности вектора b^* и матрицы A^* , а $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ – стандартное число обусловленности.

Замечание 1.4. Стандартное число обусловленности $\text{cond}(A)$ дает верхнюю оценку относительного числа обусловленности.

Везде далее будем называть $\text{cond}(A)$ числом обусловленности задачи решения системы линейных алгебраических уравнений или просто числом обусловленности матрицы A .

Из (1.10) видно, что для получения приближенного решения системы (1.8) с хорошей точностью при достаточно малых $\delta(b^*)$ и $\delta(A^*)$ надо, чтобы число $\text{cond}(A)$ было не слишком большим. Если $\text{cond}(A) \gg 1$, то задача (1.8) будет плохо обусловленной и для ее решения потребуется задавать b и A с очень высокой точностью, что не всегда возможно сделать.

Корректное решение любой конкретной системы линейных алгебраических уравнений (1.9), в которой основная матрица A^* и вектор свободных членов b^* заданы приближенно, невозможно произвести без указания отрезка, в который могут попасть значения определителя $\det A^*$. Если данному отрезку принадлежит нуль, то система (1.9) не будет иметь никакого разумного смысла. В этом случае следует ужесточить ограничения на точность, с которой должны задаваться элементы матрицы A^* . При этом эта точность должна быть такой, чтобы указанный выше отрезок не содержал нуль. Это условие является необходимым условием корректности системы (1.9).

Тема 2. Равномерное приближение функций (2ч. УСР)

1. Постановка задачи приближения функций.
2. Различные способы задания нормы в нормированном пространстве.
3. Многочлен наилучшего равномерного приближения.
4. Многочлены Чебышева.

Пусть R пространство функций $f(x)$ интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$. **Скалярным произведением** функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ называется выражение $(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$. **Нормой** элемента f называется число $\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx$. Если $(f, \varphi) = 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ **ортогональны**. Пространство с такими свойствами обозначается $L_2[a, b]$.

Рассмотрим подпространство H состоящее из линейных комбинаций $n+1$ линейно независимых функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n.$$

Это подпространство называется **подпространством обобщенных многочленов** по системе функций $\{\varphi(x_i)\}$.

Среднеквадратичным отклонением элемента $\varphi \in H$ от элемента $f \in L_2$ называется величина

$$S^2 = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx. \text{ (если функция задана аналитически)}$$

В методе наименьших квадратов приближение элемента $f \in R$ элементом $\bar{\varphi} \in H$ осуществляется таким образом, чтобы величина среднеквадратичного отклонения была минимальна в L_2

$$S^2(c_0, \dots, c_n) = \|f - \bar{\varphi}\| = \inf_{\varphi \in H[a, b]} \|f - \varphi\|.$$

Если такой элемент $\bar{\varphi}$ существует, он называется элементом наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f \in R$ в подпространстве H .

Практика показывает, что приближающие функции, построенные по методу среднеквадратичного приближения, гораздо лучше описывают реальную функцию $f(x)$, чем интерполяционные многочлены.

Теорема 2.1. Для того чтобы элемент $\bar{\varphi}(x) \in H$ был элементом наилучшего среднеквадратичного приближения, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение

$$(f - \bar{\varphi}, \varphi) = 0 \tag{2.1}$$

для любого элемента $\varphi \in H$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует такой элемент φ_1 , что $(f - \bar{\varphi}, \varphi_1) = a \neq 0$. Без нарушения общности можно считать, что $\|\varphi_1\| = 1$. Возьмем элемент $\varphi_2 = \bar{\varphi} + a\varphi_1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\|f - \varphi_2\|^2 &= (f - \varphi_2, f - \varphi_2) = (f - \bar{\varphi} - a\varphi_1, f - \bar{\varphi} - a\varphi_1) = \\
&= (f - \bar{\varphi}, f - \bar{\varphi}) - a(\varphi_1, f - \bar{\varphi}) - a(f - \bar{\varphi}, \varphi_1) + a^2(\varphi_1, \varphi_1) = \\
&= \|f - \bar{\varphi}\|^2 - 2a^2 + a^2 = \|f - \bar{\varphi}\|^2 - a^2.
\end{aligned}$$

Отсюда следует $\|f - \varphi_2\|^2 < \|f - \bar{\varphi}\|^2$, что невозможно, так как $\bar{\varphi}$ является элементом наилучшего приближения.

Достаточность. Пусть $\varphi(x) \in H$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|f - \varphi\|^2 &= (f - \bar{\varphi} + \bar{\varphi} - \varphi, f - \bar{\varphi} + \bar{\varphi} - \varphi) = \\
&= \|f - \bar{\varphi}\|^2 + (\bar{\varphi} - \varphi, f - \bar{\varphi}) + (f - \bar{\varphi}, \bar{\varphi} - \varphi) + \|\bar{\varphi} - \varphi\|^2 = \|f - \bar{\varphi}\|^2 + \|\bar{\varphi} - \varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Если $\varphi \neq \bar{\varphi}$, то получим $\|f - \varphi\|^2 > \|f - \bar{\varphi}\|^2$ для произвольного $\varphi \in H$, то есть $\bar{\varphi}$ – элемент наилучшего среднеквадратичного приближения в подпространстве H . Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 в частности следует, что если взять в качестве элементов из H последовательно $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, то из условия ортогональности (2.1) получим

$$(f - \bar{\varphi}, \varphi_i(x)) = 0, \quad (2.2)$$

для любого $i = \overline{0, n}$.

Систему (2.2) можно переписать в виде

$$c_0(\varphi_0, \varphi_i) + c_1(\varphi_1, \varphi_i) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (2.3)$$

Матрица системы (2.3) $A = \{(\varphi_i, \varphi_j)\}$ симметрична, положительно определена и ее определитель, называемый определителем Грамма, для системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$ отличен от нуля. Следовательно, система (2.2) имеет единственное решение.

Возьмем в качестве H класс алгебраических многочленов

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n.$$

Тогда $(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b x^i x^j dx$, $(f, \varphi_i) = \int_a^b f(x) x^i dx$. Обозначим $s_i = \int_a^b x^i dx$, $m_i = \int_a^b f(x) x^i dx$.

Перепишем систему (2.3) в виде

$$\begin{cases} c_0s_0 + c_1s_1 + \dots + c_ns_n = m_0 \\ c_0s_1 + c_1s_2 + \dots + c_ns_{n+1} = m_1 \\ \dots \\ c_0s_n + c_1s_{n+1} + \dots + c_ns_{2n} = m_n \end{cases}. \quad (2.4)$$

Определитель этой системы как определитель Грамма линейно независимых на $[a, b]$ функций $1, x, x^2, \dots, x^n$ всегда положителен и система имеет единственное решение.

Если $\varphi = \bar{\varphi}$, то из (2.1) следует

$$\|f - \bar{\varphi}\|^2 = \|f\|^2 - \|\bar{\varphi}\|^2. \quad (2.5)$$

В этом случае, если система функций $\{\varphi_i(x)\}$ ортонормированна, т.е.

$(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l \\ 1, & \text{если } k = l \end{cases}$, то система (2.3) решается в явном виде

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = \overline{0, n}. \quad (2.6)$$

При этом погрешность можно вычислить по формуле

$$\|f - \bar{\varphi}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2. \quad (2.7)$$

Примером ортогональной системы функций являются многочлены Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (2.8)$$

которые ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ и $\|L_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Эти многочлены можно вычислить по рекуррентной формуле

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0. \quad (2.9)$$

Многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения по отрезку $[-1, +1]$ будет многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k L_k(x), \quad (2.10)$$

$$\text{где } c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) L_k(x) dx.$$

Отметим, что ряд Фурье по многочленам Лежандра для любой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ сходится равномерно.

Многочлены Лежандра применяются в образовании сферических функций, в которых решается ряд задач математической физики.

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $P_m(x)$ значительно меньше числа узлов n . В этом случае интерполирование становится невозможным и приходится прибегать к иным приемам построения приближающего полинома для данной функции. Обычно здесь используют *точечный способ наименьших квадратов*.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$. При точечном квадратичном аппроксимировании за меру отклонения полинома

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (2.11)$$

от данной функции $y = f(x)$ на множестве точек берут величину

$$S_m = \sum_{i=0}^n (P_m(x_i) - f(x_i))^2, \quad (2.12)$$

равную сумме квадратов отклонений полинома $P_m(x)$ от функции $f(x)$ на заданной системе точек. (2.12) – *величина среднеквадратичного отклонения*.

Очевидно, что S_m есть функция коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m$. Эти коэффициенты надо подобрать так, чтобы величина S_m была наименьшей. Полученный полином называется *аппроксимирующим* для данной функции, а процесс построения этого полинома – *точечной квадратичной аппроксимацией* или *точечным аппроксимированием* функции.

Если $m < n$, то для минимизации S_m , для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, воспользуемся общим приемом дифференциального исчисления. Найдем частные производные от величины

$$S_m = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$, по всем переменным $a_0, a_1, \dots, a_m$. Приравнявая эти частные производные нулю, получим для определения неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_m$ систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \dots \dots \dots \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_m} = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Введем обозначения

$$s_k = x_0^k + x_1^k + \dots + x_n^k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + \dots + x_n^k y_n = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда систему (2.13) можно записать в виде

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_m s_m = t_0 \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 + a_2 s_3 + \dots + a_m s_{k+1} = t_1 \\ \dots \dots \dots a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + a_2 s_{m+2} + \dots + a_m s_{2m} = t_m. \end{cases} \quad (2.14)$$

где $s_0 = n + 1$.

Если среди точек x_i , $i = \overline{1, n}$ нет совпадающих, то определитель системы (2.14) отличен от нуля и, следовательно, эта система имеет единственное решение. Полином (2.11) с коэффициентами a_i , определенными из (2.14), будет обладать *минимальным квадратичным отклонением* S_{min} .

Если $m = n$, то в качестве полинома $P_m(x)$ можно взять интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, так как для него величина среднеквадратичного отклонения равна нулю

$$S_{min} = \sum_{i=0}^n (L_n(x_i) - f(x_i))^2 = 0.$$

Вычислим, например, определитель системы (2.14), когда $m = 1$. Тогда

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 = t_0 \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 = t_1 \end{cases}$$

и $\det = s_0 s_2 - s_1^2$. Учитывая неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) (n+1), \quad \text{для попарно различных узлов } x_i, \quad \text{получим}$$

$\det = (n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2 > 0$. Отметим, что матрица системы (2.14) положительно

определена, и для ее решения можно использовать, например, метод Зейделя или метод простой итерации.

Для составления системы (2.14) рекомендуется схема способа наименьших квадратов, приведенная в таблице, где принято $m=2$.

x_i^0	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$x_0 y_0$	$x_0^2 y_0$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	$x_3 y_3$	$x_3^2 y_3$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	y_4	$x_4 y_4$	$x_4^2 y_4$
S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	t_0	t_1	t_2

В общем случае, когда аппроксимирующий полином для данной функции $f(x)$ является обобщенным

$$P_m(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x),$$

для нахождения его коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m$ по способу наименьших квадратов приходится минимизировать сумму квадратов

$$S_m = \sum_{i=0}^n (a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) - f(x_i))^2,$$

где $x_0, x_1, \dots, x_n$ – заданная система точек. Используя необходимые условия экстремума, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0, \varphi_0) + c_1(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + c_m(\varphi_m, \varphi_0) = (f, \varphi_0) \\ c_0(\varphi_0, \varphi_1) + c_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + c_m(\varphi_m, \varphi_1) = (f, \varphi_1) \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ c_0(\varphi_0, \varphi_m) + c_1(\varphi_1, \varphi_m) + \dots + c_m(\varphi_m, \varphi_m) = (f, \varphi_m) \end{cases}.$$

Из этой системы определяются коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Квадратичная аппроксимация функций основывалась на способе наименьших квадратов. Уточняя понятие квадратичного отклонения, введём соответствующее расстояние Δ между данной непрерывной функцией $f(x)$ и непрерывным аппроксимирующим обобщенным полиномом $Q_m(x)$ так называемое среднее квадратичное отклонение.

Под **средним квадратичным отклонением функции** $f(x)$ и полинома $Q_m(x)$ на множестве точек $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ понимается число

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (f(x_i) - Q_m(x_i))^2} \quad (2.15)$$

Если функция $f(x)$ задана аналитически, в этом случае аппроксимация называется **интегральной**, а среднее квадратичное отклонение на отрезке $[a, b]$ определяется формулой

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - Q_m(x))^2 dx}. \quad (2.16)$$

Формулу (2.16) можно рассмотреть как предельный случай формулы (2.15) при $n \rightarrow \infty$. Действительно, выбирая на отрезке $[a, b]$ систему равноотстоящих точек

$$a = x_1, x_2, \dots, x_n = b, \text{ где } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

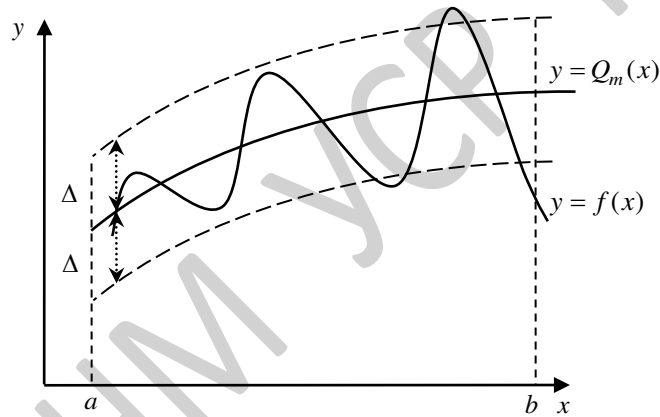
будем иметь

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - Q(x_i))^2 = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - Q(x_i))^2 \Delta x_i.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получим,

$$\Delta^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - Q(x))^2 dx.$$

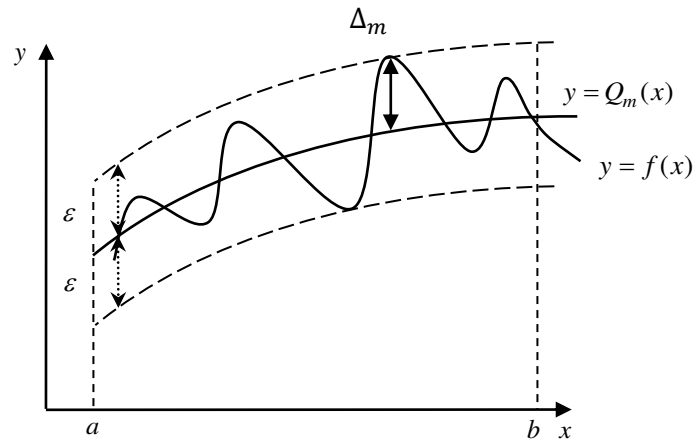
Если среднее квадратичное отклонение Δ мало, то для большинства значений x из $[a, b]$ абсолютная величина $|f(x) - Q(x)|$ также мала при $x \in [a, b]$. Следовательно $\Delta < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.



Такая ситуация наблюдается в ряде случаев при обработке наблюдений. Однако с помощью приближения функции мы можем получить закон изменения результатов наблюдений. Во многих случаях, например, при обработке результатов эксперимента оно сглаживает отдельные локальные неровности. Однако иногда для приближения функций ставят более жесткие условия: требуются гарантировать, чтобы отклонение на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и полинома $Q(x)$ было меньше заданной величины, то есть равно величине абсолютного отклонения.

Абсолютным отклонением на отрезке $[a, b]$ обобщенного полинома $Q(x)$ от непрерывной функции $f(x)$ называется число

$$\Delta(f, Q_m) = \Delta_m = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_m(x)| \quad (2.17).$$



Если $\Delta_m \leq \varepsilon$, то из формулы (2.17) следует $|f(x) - Q_m(x)| \leq \varepsilon$ для всех точек x на отрезке $[a, b]$. Тогда говорят, что обобщенный полином $Q_m(x)$ на отрезке $[a, b]$ *равномерно приближает функцию $f(x)$ с точностью до ε* .

Для случая алгебраических многочленов

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

справедлива теорема Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ то, как бы мало ни было положительное число ε , найдется полином $Q_m(x)$ достаточно высокой степени $m < n$ абсолютное отклонение которого от данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меньше ε , то есть для всех точек $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon$.

Контроль правильности вычисления.

1. Прежде всего, после решения системы уравнений, например, (2.14), необходимо подставить коэффициенты в уравнения системы (2.14) и проверить, совпадает ли значение левой части с правой;

2. Поскольку аппроксимирующий многочлен не совпадает со значением функции на заданном множестве точек, то следует вычислять по формуле (2.15) величину Δ для точечного метода наименьших квадратов или по формуле (2.16) для интегрального метода наименьших квадратов. Если после подстановки в многочлены значения x , где известно значение функции, отклонение между ними не будет превосходить величину Δ , то аппроксимирующий многочлен построен правильно.

Тема 3. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений (2ч. УСР)

1. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений m -го порядка.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений I порядка можно решать с помощью схемы Рунге-Кутты с четвертым порядком точности.

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений I порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

и требуется найти её решение на отрезке $[a, b]$.

Разобьём отрезок $[a, b]$ на n равных частей. Заменим исходную задачу разностной схемой для приближённого отыскания значений y и z в узлах сетки $\omega = \{x_{i+1} = x_i + h \mid i = 0, n-1, h = (b - a)/n\}$.

Решение системы будем искать в виде

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \end{cases},$$

где

$$\Delta y_i = (K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i)/6,$$

$$\Delta z_i = (l_1^i + 2l_2^i + 2l_3^i + l_4^i)/6.$$

Коэффициенты K^i и l^i определяются по формулам:

$$K_1^i = hf(x_i, y_i, z_i)$$

$$l_1^i = hg(x_i, y_i, z_i)$$

$$K_2^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^i}{2}, z_i + \frac{l_1^i}{2}\right)$$

$$l_2^i = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^i}{2}, z_i + \frac{l_1^i}{2}\right)$$

$$K_3^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^i}{2}, z_i + \frac{l_2^i}{2}\right)$$

$$l_3^i = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^i}{2}, z_i + \frac{l_2^i}{2}\right)$$

$$K_4^i = hf\left(x_i + h, y_i + K_3^i, z_i + l_3^i\right)$$

$$l_4^i = hg\left(x_i + h, y_i + K_3^i, z_i + l_3^i\right)$$

Аналогичным образом поступают при решении задачи Коши для систем дифференциальных уравнений m -го порядка.

Пусть отыскивается вектор-функция

$$Y(x) = \{y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(m)}(x)\},$$

являющаяся решением системы уравнений

$$\frac{dy^{(s)}(x)}{dx} = f^{(s)}(x, y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(m)}(x)), s = \overline{1, m},$$

$$y^{(s)}(x_0) = y_0^{(s)}, s = \overline{1, m}.$$

Если обобщить на эту задачу приведенные ранее формулы метода Рунге-Кутты, то здесь они запишутся в форме

$$y_{n+1}^{(s)} = y_n^{(s)} + \frac{1}{6}[k_1^{(s)} + 2k_2^{(s)} + 2k_3^{(s)} + k_4^{(s)}],$$

$$k_1^{(s)} = hf(x_n, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(m)}),$$

$$k_2^{(s)} = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n^{(1)} + \frac{1}{2}k_1^{(1)}, y_n^{(2)} + \frac{1}{2}k_1^{(2)}, \dots, y_n^{(m)} + \frac{1}{2}k_1^{(m)}),$$

$$k_3^{(s)} = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n^{(1)} + \frac{1}{2}k_2^{(1)}, y_n^{(2)} + \frac{1}{2}k_2^{(2)}, \dots, y_n^{(m)} + \frac{1}{2}k_2^{(m)}),$$

$$k_4^{(s)} = hf(x_n + h, y_n^{(1)} + k_3^{(1)}, y_n^{(2)} + k_3^{(2)}, \dots, y_n^{(m)} + k_3^{(m)}), s = \overline{1, m}.$$

Литература

1. Березовская, Е. М. Численные методы линейной алгебры: системы уравнений и собственные значения : практическое пособие / Е. М. Березовская, М. И. Жадан. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2019. – 47 с. – Режим доступа : <http://elib.gsu.by/handle/123456789/7478>.
2. Воробьева, В. Е. Основы численных методов и их реализация в MS Excel : учебное пособие / В. Е. Воробьева, Ф. И. Воробьева. – Казань : КНИТУ, 2022. – 124 с. – Режим доступа : по подписке : <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=702265> .
3. Коновалова, Е. И. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Е. И. Коновалова, Л. В. Яблокова. – Самара : Самарский университет, 2022. – 152 с. – Режим доступа : для авториз. пользователей : <https://e.lanbook.com/book/336686>.
4. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – Москва : Лаборатория знаний, 2015. – 243 с.
5. Бахвалов, Н. С. Численные методы. Решения задач и упражнения: учебное пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков. – Москва : Лаборатория знаний, 2016. – 355 с.
6. Бахвалов, Н.С. Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва : Бинوم. Лаборатория знаний, 2023. – 636 с.
7. Березин, И. С. Методы вычислений: учебное пособие: в 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – Москва : Наука, 1966.
8. Березовская, Е. М. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: тексты лекций: в 3 ч. / Е. М. Березовская, М. И. Жадан. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – Ч. 3. – 55 с.
9. Березовская, Е. М. Методы вычислений : тексты лекций : в 2 ч. / Е. М. Березовская, М. И. Жадан. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2010. – Ч. 1 : Интерполирование и нелинейные уравнения. – 80 с. – Режим доступа: <http://elib.gsu.by/handle/123456789/1589> .
10. Березовская, Е. М. Методы численного анализа: тексты лекций: в 2 ч. / Е. М. Березовская. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – Ч. 1 : Интерполяция и интегрирование. – 131 с. – Режим доступа: <http://elib.gsu.by/handle/123456789/3523> .
11. Вабищевич, П. Н. Численные методы: Вычислительный практикум. Практическое применение численных методов при использовании алгоритмического языка Python / П. Н. Вабищевич. – Москва : Ленанд, 2019. – 320 с.
12. Вержбицкий, В. М. Численные методы: линейная алгебра и нелинейные уравнения: учебное пособие / В. М. Вержбицкий. – Москва : Оникс 21 век, 2005. – 432 с.

13. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 400 с.
14. Дьяконов, В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – Издательство: ДМК Пресс, 2010. – 624 с.
15. Жуков, Б. А. Численные методы. Теория и практика в системах Maple и MathCad: учебное пособие / Б. А. Жуков, Ю. Ю. Андреева. – Волгоград: ВолгГТУ, 2018. – 60 с.
16. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – Москва : Лань, 2015. – 448 с.
17. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В. Д. Колдаев. – Москва: Форум, 2018. – 336 с.
18. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие / В. Н. Копченова, И. А. Марон. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2008. – 368 с.
19. Крылов, В. И. Вычислительные методы: учебное пособие: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – Москва : Наука, 1976. – 1977.
20. Можаровский, В. В. Вычислительные методы алгебры : практическое руководство / В. В. Можаровский, Т. М. Дёмова. – Гомель : Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 2017. – 45 с. – Режим доступа : <http://elib.gsu.by/jspui/handle/123456789/2789>.
21. Поршнев, С. В. Численные методы на базе Mathcad / С. В. Поршнев, И. В. Беленкова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.

Электронные ресурсы

22. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2023. – Режим доступа: https://scask.ru/i_book_clm.php?id=1.
23. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2023. – Т.1. – Режим доступа: https://scask.ru/i_book_calc1.php?id=1.
24. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2023. – Т.2. – Режим доступа: https://scask.ru/i_book_calc2.php?id=1.
25. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2023. – Режим доступа: https://scask.ru/q_book_dig_m.php?id=1.